9-й класс

1. Можно ли найти натуральные числа $n_1, n_2, \ldots, n_{2012}$, среди которых нет двух одинаковых, так, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\cdots+\frac{1}{n_{2012}}=1?$$

2. Коля случайно стер с доски пример на вычитание. Сам пример он не запомнил, но обратил внимание на то, что числа были целые и сумма уменьшаемого, вычитаемого и разности была равна то ли 2011, то ли 2012. Можно ли определить, чему было равно уменьшаемое в стертом примере? Ответ поясните.

3. Мы записываем на доске многочлен $f(x)$, все коэффициенты которого — некоторые цифры от 0 до 9, по убыванию степеней, не пропуская ни одной из них (таким образом, некоторые коэффициенты могут быть равны нулю). Затем мы стираем с доски всё, кроме коэффициентов, получая целое неотрицательное число $N\big(f(x)\big)$ (например, если $f(x)=7x^2+5=7x^2+0x+5$, то $N\big(f(x)\big)=705$). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены степени не выше 8, все коэффициенты которых — 0 или 1. Верно ли равенство $N\big(f(x)\cdot g(x)\big)=N\big(f(x)\big)\cdot N\big(g(x)\big)$?

4. Точки сторон правильного треугольника раскрашены в два цвета. Докажите, что найдётся прямоугольный треугольник с вершинами одного цвета.

5. В каждой клетке прямоугольной таблицы $m\times n$ (m строк и n столбцов) записано натуральное число. За один ход разрешается либо удвоить числа в каком-нибудь столбце, либо вычесть 1 из всех чисел какой-нибудь строки. Докажите, что такими операциями можно добиться того, чтобы все числа в таблице стали равными 0.

6. Сумма 10-и действительных чисел равна 5030. Доказать, что из этих чисел можно выбрать 4, сумма которых не меньше 2012.